第三章　相似原理和量纲分析

前言：

第二章一介绍了流体运动的理论研究途径：建立运动方程组+定解条件 → 求解。

困难：所建立运动方程组是非线性的，难以求解；解有非唯一性。目前的现状是：只有少数简单的问题可以求解。

随着计算机的出现和发展，出现了计算流体力学，它将非线性方程组离散化，通过数值求解过程解得数值解。但方程组离散化过程和各种数值方法本身还有问题存在。

还需要实验流体力学的补充和验证。

三种研究流体力学的方法是相辅相成的。

本章不对实验研究作全面介绍，只是介绍它的理论基础——相似性原理（是相似理论的一部分），以及一种研究相似理论的方法——量纲分析。

§1　流体力学的模型实验和相似概念

一、模拟实验的必要性

当我们使用实验方法研究大型实物在流体中的运动时，如飞机、巨型货轮、航母、宇宙飞船等的运动时，或山脉对天气气候的影响、城市污染等气象问题时，因为实物体积庞大、我们不可能取真实实物研究，而是要进行相似模拟研究，即要制造实物模型，而后对模型做实验，得到实验数据，对数据分析。

这就牵扯到两个基本问题：

问题

（*）如何去做模型？

（**）得到的实验数据如何处理，如何将它转化成实际情况。

“如何去做模型”的问题就是相似问题。

二、流体力学的相似概念

1、几何相似 ：就是模型流场跟原型流场的“边界”几何形状要求相似，即对应部位的夹角相等，线段尺寸大小成常数比例。

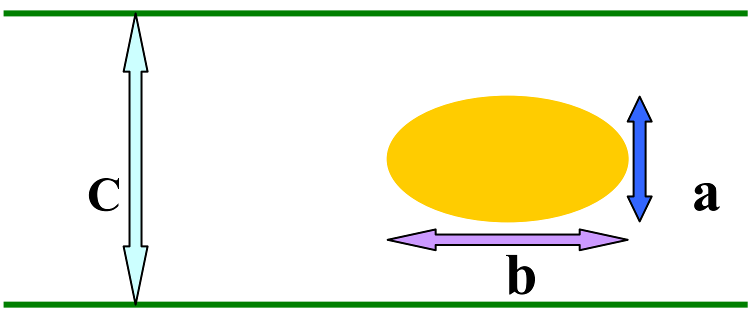

图 **SS3-1**

几何相似

如图 **SS3-1**，原形流场 **1**：河水绕椭圆体流动。

模型流场 **2**：水槽中的水绕椭圆体流动。

首先必须满足：$\frac{a1}{a2}=\frac{b1}{b2}=\frac{c1}{c2}=c_l$ ————————几何相似的条件

这样原形流场和模型流场才能点点对应，且相对应的面积、体积才成比例。即：

$$\frac{s1}{s2}=c_l^2,\frac{v1}{v2}=c_l^3$$

（在对应点的坐标也应满足：$\frac{x1}{x2}=\frac{y1}{y2}=\frac{z1}{z2}=c_l$ ---放的位置一样）

几何相似是其他相似的基础。

2、时间相似

如青藏高原对天气气候的影响，气候时间尺度长，（几十年），实验不可能那么长，可以比实际情况加快进行，也可以延缓进行（慢镜头），但要求同一点上的变化过程按同一时间比例进行。$\frac{t1}{t2}=c_t$

3、<u>运动相似：</u>就是两流场对应点上的速度方向一致、大小呈常数比例。

即：$\frac{u1}{u2}=\frac{v1}{v2}=\frac{w1}{w2}=c_v$

当运动相似时，时间也自然相似。即运动相似也往往意味着几何相似和时间相似。

加速度也会相似。

（ $$c_v = \frac{v1}{v2} = \lim_{\Delta t1,\Delta t2\to 0} \frac{\Delta l_1 / \Delta t_1}{\Delta l_2 / \Delta t_2} = \lim_{\Delta t1,\Delta t2\to 0} \frac{\Delta l_1 / \Delta l_2}{\Delta t_1 / \Delta t_2} = \frac{c_l}{c_t} = const$$

）

（ $$c_a = \frac{a1}{a2} = \lim_{\Delta t1,\Delta t2\to 0} \frac{\Delta v_1 / \Delta t_1}{\Delta v_2 / \Delta t_2} = \lim_{\Delta t1,\Delta t2\to 0} \frac{\Delta v_1 / \Delta v_2}{\Delta t_1 / \Delta t_2} = \frac{c_v}{c_t} = const$$

------得出 c_t 是常数）

4、动力相似：在运动相似的基础上，要求在两流场相应点上各动力学变量成同一常数比例。

如：对应点上的作用力的大小和方向相似： $\frac{P1}{P2} = c_p$

如：对应点上的密度相似： $\frac{\rho 1}{\rho 2} = c_\rho$

三、相似理论介绍

所探讨几何相似、时间相似、运动相似、和动力相似等方面的理论，甚至可以包括其他物理和化学变化的过程的理论，就是相似理论。

相似理论的核心就是所谓的相似的三定理：

①关于相似判据的存在性。

②关于物理方程转化成为相似判据关系式的可能性。

③关于相似性的充分必要条件。

四、相似理论的应用

① **工程上：　如 飞机船舶设计性能的检验。**

② **气象上：台风、大气环流、高原的天气影响、大气污染扩散、边界层风、温分布。**

③ **可以用来简化方程，寻找无量纲判据，探求物理规律。**

§2　相似判据

从本节开始我们要推求两个流场动力学相似的必要条件，这个条件成立与否，可以用作判断两个流场是否是动力学相似的依据，因此被称为相似判据。这些判据也是我们把实验数据转化成实际数据的条件。

相似判据：
- 已知运动条件：
  - 方程分析方法---（严格）相似
  - 方程无量纲化----（特征）相似
- 不知道运动规律：JI 定理。

一、假设

1、**两个流场是几何相似的，并且是时间相似的**，即有：

$$\frac{x1}{x2}=\frac{y1}{y2}=\frac{z1}{z2}=\frac{l1}{l2}=c_l\,,\qquad \frac{t1}{t2}=c_t$$

这里包括了边界条件和初始条件的几何相似。

2、两个流场是运动相似的，即：

$$\frac{u1}{u2}=\frac{v1}{v2}=\frac{w1}{w2}=\frac{V1}{V2}=c_v$$

3、各物理量也成常数比例，即：

$$\frac{\rho 1}{\rho 2}=c_\rho \qquad \frac{\mu 1}{\mu 2}=c_\mu \qquad \frac{g1}{g2}=c_g$$

4、两个流场内压力分布也相似

$$\frac{P1}{P2}=c_P$$

那么，以上 $c_l, c_v, c_t, c_\rho, c_\mu, c_p, c_g$ 就称为相似常数。

相似常数的特征：在场内所有对应点上必须是同一个值。

重要的一点

在原型场上成立的流体运动规律在模型场中也应该成立，这样实验才有意义。因此，以上这些相似常数不是随意相互独立的选取的，它们之间一定受到表征运动规律的方程的约束和控制（在这里我们称这些方程为控制方程）。这些约束条件就是我们要求的动力学相似的充分必要条件。

二、相似判据

（这里讨论不可压粘性流体的相似判据，$\nabla \bullet \vec{V}=0, \mu \neq 0$）

我们以不可压粘性流体运动为例，用方程分析的方法来推求出该流体运动的动力学相似的必要条件——相似判据。

途径 N-S $\nabla \bullet \vec{V} = 0, \mu \neq 0$

各物理量成常数比例的关系 $\xrightarrow{\text{代入}}$ 控制方程 $\xrightarrow{\text{求出}}$ 相似判据

以 **Z** 方向的方程为例说明（因为 **Z** 方向比较完整）

流场 I：

$$\rho1\frac{\partial w1}{\partial t1}+\rho1(u1\frac{\partial w1}{\partial x1}+v1\frac{\partial w1}{\partial y1}+w1\frac{\partial w1}{\partial z1})=-\rho1g1-\frac{\partial P1}{\partial z1}+\mu1(\frac{\partial^2 w1}{\partial x1^2}+\frac{\partial^2 w1}{\partial y1^2}+\frac{\partial^2 w1}{\partial z1^2})$$

（3.7）

流场 II：

$$\rho2\frac{\partial w2}{\partial t2}+\rho2(u2\frac{\partial w2}{\partial x2}+v2\frac{\partial w2}{\partial y2}+w2\frac{\partial w2}{\partial z2})=-\rho2g2-\frac{\partial P2}{\partial z2}+\mu2(\frac{\partial^2 w2}{\partial x2^2}+\frac{\partial^2 w2}{\partial y2^2}+\frac{\partial^2 w2}{\partial z2^2})$$

（3.8）

步骤 1

（3.8）的流场 II 中各物理量用第一流场的各物理量以及相似常数代入得到：

$$\begin{aligned}&\frac{c_\rho c_v}{c_t}\rho1\frac{\partial w1}{\partial t1}+\frac{c_\rho c_v{}^2}{c_l}\rho1(u1\frac{\partial w1}{\partial x1}+v1\frac{\partial w1}{\partial y1}+w1\frac{\partial w1}{\partial z1})\\&=-c_\rho c_g\rho1g1-\frac{c_p}{c_l}\frac{\partial P1}{\partial z1}+\frac{c_\mu c_v}{c_l^2}\mu1(\frac{\partial^2 w1}{\partial x1^2}+\frac{\partial^2 w1}{\partial y1^2}+\frac{\partial^2 w1}{\partial z1^2})\end{aligned} \quad \text{（3.9）}$$

步骤 2

要使（**3.9**）仍然满足原运动方程（即 **3.9** 与 **3.7** 一样），则有：

$$\frac{c_\rho c_v}{c_t}=\frac{c_\rho c_v{}^2}{c_l}=c_\rho c_g=\frac{c_p}{c_l}=\frac{c_\mu c_v}{c_l^2} \quad \text{（3.10）}$$

这就是模型流体中流体运动仍然遵守 **N-S** 方程的充分必要条件。否

则就成为其他的流动了，就不是我们希望的结果。

步骤 3

取 $\dfrac{c_\rho c_v^{\,2}}{c_l}$ （3.10 中的第二个）去除（3.10），第二个等于 1 了，其它四个也应该为 1，即：

$$\frac{c_l}{c_v c_t}=1,\qquad \frac{c_g c_l}{c_v^{\,2}}=1\quad,\qquad \frac{c_p}{c_\rho c_v^{\,2}}=1,\qquad \frac{c_\mu}{c_v c_l c_\rho}=1$$

（3.11）

（3.10）与（3.11）是等价的，这就是如果两个流场（在研究重力场不可压粘性流体问题）动力学相似时，相似常数必须满足的条件。

步骤 4

再以 $\dfrac{l1}{l2}=c_l$，$\dfrac{t1}{t2}=c_t$ $\dfrac{V1}{V2}=c_v$，$\dfrac{\rho 1}{\rho 2}=c_\rho$，$\dfrac{\mu 1}{\mu 2}=c_\mu$，

$\dfrac{g1}{g2}=c_g$，$\dfrac{P1}{P2}=c_P$ 代入（3.11） 后就有：

$$\frac{l1}{t1V1}=\frac{l2}{t2V2},\qquad \frac{V1^2}{g1l1}=\frac{V2^2}{g2l2},\qquad \frac{P1}{\rho 1V1^2}=\frac{P2}{\rho 2V2^2},\qquad \frac{l1\rho 1V1}{\mu 1}=\frac{l2\rho 2V2}{\mu 2}$$

（3.12）

上面（3.12）的特点：

（1）等式两边分别由原型流场和模型流场相应的物理量组合而成的。

（2）等式的两边都是一个“无量纲数”。

（3）由于在两个流场中只有当这些无量纲数相等时，（3.10）

才成立，两个流场才相似，所以这些无量纲数称为相似判据。

现在给出这四个无量纲相似判据命名：

$S_r \equiv \dfrac{l}{tu}$　斯特劳哈尔数（**Strouhal**）**---**随时间变化相似（非定常相似）

$F_r \equiv \dfrac{V^2}{gl}$　弗劳德数（**Froude**）**-----**惯性力／重力：重力作用相似

$Eu \equiv \dfrac{\Delta p}{\rho V^2}$　欧拉数（**Euler**）**------**压力差／惯性力：压力对流动作用的相似性

$\mathrm{Re} \equiv \dfrac{Vl}{\nu}$　雷诺数（**Reynolds**）**-----**惯性力／粘性力：粘性作用对两个流场相似

欧拉数中 $Eu \equiv \dfrac{\Delta p}{\rho V^2}$，用压力差 **Δp**，代替 **p** 是因为压力的数值较大，用差代替更灵敏些。

对于粘性不可压流体，当边界条件及初始条件满足几何相似的情况下，这四个数是否相等（$(S_r)_1=(S_r)_2$，$(F_r)_1=(F_r)_2$，$(Eu)_1=(Eu)_2$，$(\mathrm{Re})_1=(\mathrm{Re})_2$）成为“模”与“原”是否动力学相似的判据，所以这四个数就是重力场作用下不可压缩流体的动力相似判据（相似判据）。

三、说明

1、以上四个判据是研究重力场作用下不可压缩流体的动力相似判据（相似判据），如果考虑的运动更复杂，控制方程的项数由增加时，则相应的相似判据也应该增加一些。如第八章湍流问题会出现 **Ri** 数。再如，考虑地球自转时，会有 **Rossby** 数。

2、在具体问题时，不是所有的相似判据都同等重要。所以对于不同问题要善于判别哪些是主要的，以减少相似的要求。

例如：（**1**）

对定常问题：无需引入 **Sr** 数。

对非定常问题：若时间变化不是独立的，满足：$t = \frac{l}{V}$，因此 **Ct** 也非独立，则此时 **Sr=1 (** 不论是模型还是实体都 **Sr=1)**，也不需要 **Sr** 条件了。

例如（**2**）：很多问题中，不用 **P** 而常用压力差 **Δp**，比如满足伯努利方程时，**Δp** 可以用 $\frac{1}{2}\rho V^2$ 来做标尺（见 **P65** ），此时就不用 **Eu** 了，**Eu**≈**1**。

例如（**3**）：**P89**，把重力作用包含到流体压力的静止压力部分，**Fr** 就不用出现了。

要具体问题具体对待，尽量减少判据数。

§3　无量纲方程

从理论上讲，上节推出的相似判据在实际使用时要求对所有对应点进行比较是否相等后，才能推断两个流场是否动力学相似。这在使用中很不方便，有时也不需要点点相似。因此本节介绍另一种判据——特征无量纲数。

一、特征物理量和物理量的无量纲化

1、概量

在特定的物理现象和物理过程中，其物理量的数值总是变化在一定范围内（如气温，风速，水流。。），所以总可以引入一个所谓的“概量”来反映该物理量的一般大小，并用10^{α}表示。

温度概量：10^0-10^2，风速概量：10^1-10^2，水流概量：10^0-10^1

2、特征物理量（简称特征量、特征值）

（**1**）定义：　对某类特定的物理过程，引入最具有代表性最能表示该物理现象的某种物理特征数值，把这个物理特征数值称为该问题中相应的**特征物理量，简称特征量、特征值**。

例如：在气象中讨论几千公里范围的风速变化，风速概量：

$$10^1-10^2,$$

则选 **1** 千公里作特征长度量，可以写为：**L=** 10^6 米。

选 **10** 米/秒作为特征速度，并写为：**U=**10^1米

（2）注意点：

（*）特征量的选取由具体问题确定，不一概而论。

（**）一旦选定特征值，就不再变动，且它是一个常数值。特征值一旦变化，性质类别就要变了。

（***）特征值有量纲，其量纲就是对应物理量的量纲。

（****）对两个相似流动问题作比较时，两流动的特征量的取法必须一致。

3、无量纲（物理）量

（1）定义：无量纲（物理）量：**把一个物理量用它相应的特征量去除，就得到了这个物理量的无量纲量。无量纲量没有量纲。**

如一个物理量 **a**，它的特征量为 **A**，则物理量 **a** 的无量纲量是：$a' = a/A$，

这样一来，物理量 **a** 又可以写成：$a = Aa'$。

又存在另一个物理量 **b**，其无量纲量是：$b' = b/B$，那么，**a** 与 **b** 的差就是：

$$a - b = Aa' - Bb'$$

如果 **a** 与 **b** 的特征值相等（**A=B**），则有 ：

$$a - b = Aa' - Bb' = A(a' - b')$$

所以**这两个物理量的差就完全由它们的无量纲量的差决定了**。

（2）常见的无量纲量

① **无量纲坐标**： 把流场中坐标 x, y, z，用问题中的特征长度 L 去除后得到：

$$x' = x/L,\qquad y' = y/L,\qquad z' = z/L$$

这里的 x', y', z' 就称为无量纲坐标。

② **无量纲速度** $\vec{V}'$： 速度 $\vec{V}$ 用该问题的特征速度 U 去除后得到：

$$\vec{V}' = \vec{V}/U \quad （或 V_x' = V_x/U, V_y' = V_y/U, V_z' = V_z/U$$

③ **无量纲时间** t' ： $t' = t/T$， （T：特征时间）

④ **无量纲压力** P'： $p' = p/\rho_0 U^2$

⑤ **无量纲密度**： ρ' ： $\rho' = \rho/\rho_0$

⑥ **常数的特征值就是它自己，则常数的无量纲量是 1**：

如重力加速度 **g**，其特征值是 **G=g**，无量纲量是 $g' = 1$

可见，一个具体的物理量总可以写成该物理量的有量纲的特征值 X 该物理量的无量纲量。

即： **具体物理量=特征量 X 无量纲量**

（特征值由概量来定，保留量纲，特征值取得合适可以使无量纲量的量阶在 10^0附近，也即 **1** 附近。这完全凭经验。）

（3）**无量纲量的特点**

① 反映物理量的具体大小，与测量单位（即量纲）无关。

例如：风速 u=3m/s，取特征量 U=10m/s，则无量纲量风速 **u’=0.3**。

若不用 m/s 单位，而用 cm/s，则：

风速 u=300cm/s，取特征量 U=1000cm/s，则无量纲量风速 **u'=0.3**。与单位无关。

②由于对于同一个问题，特征值是不变的常数物理量，因此具体物理量的时空变化就都体现在无量纲量内了。

下表给出特征量和无量纲量的区别。

特征量	无量纲量
（1）是有量纲量，量纲就是相应物理量的量纲。	（1） 无量纲的，与测量单位无关。
（2）大小用概量表示，反映一般大小。	（2）反映物理量的具体大小。
（3）在同一个问题中保持不变。	（3）物理量的时空变化完全由无量纲量所给定。这就是后面讲到可以把方程无量纲化的基本出发点。

4、物理量的无量纲化

把有量纲的物理量变为相应的无量纲的物理量，这一过程称为把物理量无量纲化。

二、无量纲方程

1、方程无量纲化

过程如下： 以 Z 方向的 N-S 方程为例：

步骤 1

（1）选取特征量　**----P91（3.23）**

步骤 1

$$\begin{cases} u' = u/U, & v' = v/U, & w' = w/U \\ \rho' = \rho/\rho_0, & p' = p/\rho_0 U^2, & t' = t/\frac{L}{U} \\ x' = x/L, & y' = y/L, & z' = z/L \end{cases}$$

（这里已经设了时间不独立，可以用 **T=L/U** 作特征量。故 **St** 数不出现。）

（选 $p' = p/\rho_0 U^2$ 后 **Eu** 数不再出现。）

步骤 2

（2）将以上选取的特征量代入 Z 方向的 N-S 方程（3.7）：

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t} + \rho(u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}) = -\rho g - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}) \qquad \text{(3.7)}$$

分项看看：$\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{U}{T}\dfrac{\partial w'}{\partial t'} = \dfrac{U}{L/U}\dfrac{\partial w'}{\partial t'} = \dfrac{U^2}{L}\dfrac{\partial w'}{\partial t'}$

$$u\frac{\partial w}{\partial x} = Uu'\frac{U}{L}\frac{\partial w'}{\partial x'} = \frac{U^2}{L}u'\frac{\partial w'}{\partial x'}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\rho'\rho_0}\frac{\rho_0 U^2}{L}\frac{\partial p'}{\partial z'} = \frac{U^2}{L}\frac{1}{\rho'}\frac{\partial p'}{\partial z'}$$

$$\frac{\mu}{\rho}(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}) = \nu\frac{U}{L^2}(\frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2}) = \nu\frac{U}{L^2}\nabla'^2 w'$$

则（3.7）变为：

$$\frac{U^2}{L}(\frac{\partial w'}{\partial t'} + (u'\frac{\partial w'}{\partial x'} + v'\frac{\partial w'}{\partial y'} + w'\frac{\partial w'}{\partial z'}))$$
$$= -g - \frac{U^2}{L}\frac{1}{\rho'}\frac{\partial p'}{\partial z'} + \nu\frac{U}{L^2}(\frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2}) \qquad (*)$$

步骤 3

（3）将（*）两边同除以 U^2/L，得到：

$$\frac{\partial w'}{\partial t'}+(u'\frac{\partial w'}{\partial x'}+v'\frac{\partial w'}{\partial y'}+w'\frac{\partial w'}{\partial z'})$$
$$=-\frac{gL}{U^2}-\frac{1}{\rho'}\frac{\partial p'}{\partial z'}+\frac{\nu}{UL}(\frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2})$$
$$=-\frac{1}{Fr}-\frac{1}{\rho'}\frac{\partial p'}{\partial z'}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla'^2 w'$$

（**3.27**）

（**3.27**）中的**Fr** 和**Re** 都是由特征值组成的，并且是无量纲的，所以称为特征无量纲数，具体称为**特征弗劳德数**和**特征雷诺数**。

（**3.27**）中的每一项都是无量纲的，所以称之为**无量纲Z方向运动方程**，或**Z方向运动方程的无量纲形式**，简称**无量纲方程**。

对其他控制方程也可以导出类似的无量纲方程。

2、方程无量纲化的好处：

（**1**）各无量纲方程与所选用的单位无关，更具有普遍性，便于使用。

（**2**）各无量纲量的概量都是大约为 **10^0**，所以无量纲方程中各项的相对大小（相对重要性）就体现在它们的系数上，如（**3.27**）中除了含**Fr** 和**Re** 的项外，其余项的量阶都约是 **10^0**，因此，若**$Re=10^2$**，则 **$1/Re=10^{-2}$**，此项可以略去，从而简化了方程。

（**3**）**找出了相似判据。-------两个流场相似的判据：两个流场的特征无量纲数相同。**

所以，特征无量纲数可以作为相似判据。

下面对已经讲到的两种相似判据加以比较。

相似判据	特征无量纲数（或称为特征相似判据）
（1）通过分析方程得到。	（1）方程无量纲化求得的。
（2）由具体的实际的物理量组成的无量纲的数，但因为具体的物理量在场内各点数值不同，因此，这些无量纲数也逐点不同，要一一检验。	（2）由特征物理量组成无量纲数，因为特征量只反映物理量的一般大小，在同一问题中不变，因此，特征无量纲数在场内处处相同。
（3）由它们判断的相似是严格的相似。	（3）　由它判断的相似是特征相似，不是严格相似。

§4　特征无量纲数

上节推出的特征无量纲数，它的特点是：

（1）由特征值组成，因为特征量只反映物理量的一般大小，在同一问题中不变，因此，特征无量纲数在场内处处相同，是个普适常数，因此用它们作为相似判据，只在一、两个点上进行检验即可，更方便。

（2）它是无量纲量，与测量单位无关。

（3）它一般的可以反映出方程中各项的相对大小。

在流体力学中，人们根据不同用途、需要和目的，引入许多特征无量纲数。本节就着重说明一下 Re 和 Fr 数的物理意义和用途，并列举一些特征无量纲数，以便查用。

一、Re 数

它很重要，在气象问题中常常接触它。

Re---Reynolds 于 **1883** 年探索流动的稳定与湍流问题时引出的。以后它的应用又有新的发展。它**是迁移惯性项与粘性项概量（量级）之比的结果**：

$$\mathrm{Re}=\frac{O((\vec{V}\bullet\nabla)w)}{O(\nu\nabla^2 w)}=\frac{U^2/L}{\nu U/L^2}=\frac{UL}{\nu}=\frac{\rho_0 UL}{\mu}$$

变形：

$$\mathrm{Re}=\frac{UL}{\nu}=\frac{U^2/L}{\nu U/L^2}=\frac{\text{特征惯性力}}{\text{特征粘性力}}$$

这**说明 Re 数反映了这两项在运动方程中的相对大小或相对重要性**。

所以**按 Re 数大小来分，流动可以分成**：

Re>>1，　称为大 **Re** 数流动，或粘性很弱的流动-----------一般情况略去粘性项，就近似为理想流体了。

Re≈1，　称为 **Re** 数近于 **1** 的流动，或一般粘性流动---------惯性项～粘性项

Re<<1，　称为小 **Re** 数流动，或粘性很强的流动----------惯性项小于粘性项，可略去惯性项（非线性项），使方程线性化。

要指出，**Re** 数的大小不仅与流体的物理性质 $\nu=\mu/\rho$（运动学粘性系数=粘性系数/密度），而且还取决于 **U**，**L**，　三者要综合起来考虑。

Re 数的用途：

（**1**）相似判据

Re 数相等表示粘性对流体的作用相等。

（**2**）简化方程

（**3**）研究宏观、微观运动（**P93—**（**3.33**），（**3.34**））。

（**4**）作为层流运动和湍流运动的判据。（第八章介绍）

二、Fr 数

前面已定义出：

$$F_r \equiv \frac{U^2}{gL}$$ 弗劳德数（**Froude**）**-----**惯性力/重力：重力作用相似，

它**是迁移惯性项与重力项概量（量级）之比的结果**：

$$F_r = \frac{O((\vec{V}\bullet\nabla)w)}{O(g)} = \frac{U^2/L}{g} = \frac{U^2}{gL} = \frac{\text{特征惯性力}}{\text{特征重力}}$$

Fr>>1， 称为大 **Fr** 数流动 **-----------**重力作用相对于惯性项而言很小，可以不考虑重力的影响，也称轻流体 。如航空工程的空气动力学。

Fr<<1， 称为小 **Fr** 数流动 **----------** 重力作用对流体运动影响很重要，如地球物理流体力学。

三、其它特征无量纲数 （不讲，）

§5　量纲分析和π定理

前面多次提到物理量的量纲和将物理量无量纲化，本节首先对与物理量的量纲相关的问题进行分析，从而引出 π定理。

一、量纲分析

1、有量纲的量和无量纲的量：　凡是与测量单位有关的量就是有量纲量，与测量单位无关的量就是无量纲量。

2、测量单位

分：　基本单位和导出单位

基本单位------直接给定的。如长度、质量、时间的单位。（m, kg, s）

导出单位----派生的，由基本单位表示。如速度、密度、压力等的单位。

常用的测量单位体系：

CGS制	厘米	克	秒
MTS制	米	吨	秒
MKS制	米	千克	秒

3、量纲：　测量单位的种类，而不用去管用什么单位制。

如：　长度的量纲用［L］来表示。

质量的量纲用［M］来表示。

时间的量纲用［T］来表示。

这三个称为基本量的量纲（基本量纲）

而导出单位的量纲是用基本量纲的幂次乘积表示，如速度的量纲可以用长度量纲和时间量纲表示，即：　$[V]=[L][T]^{-1}$。并称之为量纲方程。

再如：　$[\mu]=[M][L]^{-1}[T]^{-1}$

我们有时也简单写成：　$[V]=LT^{-1}$

$$[\mu]=ML^{-1}T^{-1}$$

4、“量纲独立”的量和“量纲不独立”的量

（*）**凡是彼此独立，没有任何联系的量，即其中任一量的量纲不能用其它各量之量纲的幂次项组合而成，这些量称为“量纲独立”的量**。

基本量的量纲都是量纲独立的，基本量都是“量纲独立”的量。

（**）**一些有量纲的量，其中任一量的量纲可以用其它量之量纲的幂次项组合而成，则称这些量是“量纲不独立”的量**。

如：速度、长度和时间就是“量纲不独立”的量，因为$[V]=LT^{-1}$。

判别量纲独立与否，必须作具体分析，不要用数目多少来判断，有时三个量也可以是量纲独立的，而两个量可能是量纲不独立的。

5、量纲齐次性原理

各物理量间有运算关系时，其量纲的运算必须遵循如下法则：

（1）量纲相同的物理量才能相加减，相加减后的物理量具有同样的量纲。

（2）两个物理量乘积的量纲等于这两个物理量量纲的乘积。

如：$[A1]=M^{p1}L^{q1}T^{r1}$，　$[A2]=M^{p2}L^{q2}T^{r2}$，　则：$[A1A2]=M^{p1+p2}L^{q1+q2}T^{r1+r2}$。

(3) 物理方程中各项的量纲必须相同。

（**4**）以物理方程中的某一项除以其它项，则方程化为无量纲形式。

二、π 定理

力学的基本任务是寻求来自生产实践中出现的力学问题中各个物理量间数量变化的联系。**根据以上的量纲分析的法则，也可以来分析这些物理量间的关系，这就是量纲分析的出发点**。

我们把问题中的已知数据称为主定量，而所求的物理量称为被定量（待定量）。**若a是被定量，它与几个主定量** $a_1, a_2, a_3, \cdots a_m, \cdots a_n$ **具有某种物理关系如下：**

$$a = f(a_1, a_2, a_3, \cdots a_m, \cdots a_n) \qquad (3.54)$$

（**3.54**）**约束关系**

上式表示要研究的现象所固有的规律，**现在的任务是要根据量纲分析原理将上式化为无量纲形式，并减少其自变量的数目，以利于我们求出分析解，或有利于实验处理。**

以下看这一过程：

步骤 **1**

若（**3.54**）中 **n** 个主定量 $a_1, a_2, a_3, \cdots a_m, \cdots a_n$ 中有 **m** 个量纲独立的量 $a_1, a_2, a_3, \cdots a_m$，则其余各量的量纲可以用 $a_1, a_2, a_3, \cdots a_m$ 这 **m** 个量纲独立的量的量纲来表示，即：

$$[a_{m+1}]=[a_1]^{r_{11}}[a_2]^{r_{12}}\cdots[a_m]^{r_{1m}}$$
$$[a_{m+2}]=[a_1]^{r_{21}}[a_2]^{r_{22}}\cdots[a_m]^{r_{2m}}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$[a_n]=[a_1]^{r_{n-m,1}}[a_2]^{r_{n-m,2}}\cdots[a_m]^{r_{n-m,m}}$$

步骤 2

根据量纲齐次原理，则**由主定量可以得到 n-m 个无量纲数**：

$$\pi_1=\frac{a_{m+1}}{a_1^{r_{11}}a_2^{r_{12}}\cdots a_m^{r_{1m}}}$$
$$\pi_2=\frac{a_{m+2}}{a_1^{r_{21}}a_2^{r_{22}}\cdots a_m^{r_{2m}}}$$
$$\vdots \qquad \vdots \tag{3.55}$$
$$\pi_{n-m}=\frac{a_n}{a_1^{r_{n-m,1}}a_2^{r_{n-m,2}}\cdots a_m^{r_{n-m,m}}}$$

同样，待定量 a 的量纲也可以用 $a_1,a_2,a_3,\cdots a_m$ 这 m 个量纲独立量表示：

$$[a]=[a_1]^{r_1}[a_2]^{r_2}\cdots[a_m]^{r_m}$$

所以也有无量纲数：$$\pi=\frac{a}{a_1^{r_1}a_2^{r_2}\cdots a_m^{r_m}} \tag{3.56}$$

将（3.54）$a=f(a_1,a_2,a_3,\cdots a_m,\cdots a_n)$ 代入上式（3.56）得到：

步骤 3

$$\pi=\frac{a}{a_1^{r_1}a_2^{r_2}\cdots a_m^{r_m}}=\frac{f(a_1,a_2,\cdots a_m,\cdots a_n)}{a_1^{r_1}a_2^{r_2}\cdots a_m^{r_m}}=f_1(a_1,a_2,\cdots a_m;\pi_1,\pi_2,\cdots\pi_{n-m})$$

步骤 4

根据量纲齐次性原理，上式左边是无量纲数，右边也应该是无量纲数，则右边不会含有量纲的独立变量，即不含有 $a_1, a_2, a_3, \cdots a_m$，应该是如下形式：

$$\pi = \frac{a}{a_1^{r_1} a_2^{r_2} \cdots a_m^{r_m}} = \frac{f(a_1, a_2, \cdots a_m, \cdots a_n)}{a_1^{r_1} a_2^{r_2} \cdots a_m^{r_m}} = \varphi(\pi_1, \pi_2, \cdots \pi_{n-m})$$

即：　$\pi = \varphi(\pi_1, \pi_2, \cdots \pi_{n-m})$　　（3.57）　就是 π 定理。

与（3.54）$a = f(a_1, a_2, a_3, \cdots a_m, \cdots a_n)$　对比看到：

** π 定理化为无量纲形式；π 定理中的自变量个数减少了 m 个，只有 n-m 个了。

π 定理也可变形写成：$a = a_1^{r_1} a_2^{r_2} \cdots a_m^{r_m} \varphi(\pi_1, \pi_2, \cdots \pi_{n-m})$　　（3.57 ‘）

（或　$f(a_1, a_2, \cdots, a_m, \cdots a_n) = a_1^{r_1} a_2^{r_2} \cdots a_m^{r_m} \varphi(\pi_1, \pi_2, \cdots \pi_{n-m})$

π 定理的使用步骤：

① 首先选择一组与问题有关的合适的物理参数。

② 其次从这些物理参数中确定量纲独立的量，应用 π 定理得到无量纲数 π 。

③ 再用实验方法（或理论）方法确定 π 的函数关系。

三、 π 定理的具体应用

π 定理可以用来简化方程求分析解。

例题 1　：　不可压粘性流体在水平圆管中作定常直线运动。

设圆管半径为 r，长度为 l，流体在管截面处的流速为 $\overline{u}$，流体密度为 ρ，粘性系数是 μ。

求：沿管轴方向流过 l 距离后的压力坡降 $\Delta p = p_0 - p_l$。

解：（1）根据实际情况和物理考虑，影响 Δp 的因子有：管长 l，圆管半径 r，流速 $\overline{u}$，流体密度 ρ，粘性系数 μ。即：$\Delta p = f(l, \overline{u}, \rho, \mu, r)$

（2）选取量纲独立的量：r,，$\overline{u}$，ρ。

（3）分析各量的量纲：

[r]=L，　[$\overline{u}$]=LT^{-1}，　[ρ]=ML^{-3}，

[l]=L，　[μ]=ML^{-1}T^{-1}，　[Δp]=ML^{-1}T^{-2}

（4）求 π_1, π_2, π：

$$\pi = \frac{\Delta p}{r^{r_1} \overline{u}^{r_2} \rho^{r_3}} \rightarrow = (ML^{-1}T^{-2})(L^{-r_1})(L^{-r_2}T^{r_3})(M^{-r_3}L^{3r_3})$$

$$= M^{1-r_3} L^{-1-r_1-r_2+3r_3} T^{-2+r_2}$$

因为 π 是无量纲数，则有以下方程组：

$\begin{cases} 1 - r_3 = 0 \\ -1 - r_1 - r_2 + 3r_3 = 0 \\ -2 + r_2 = 0 \end{cases}$　解得：$\begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 2, \\ r_3 = 1 \end{cases}$　再回带到上面的 $\pi = \dfrac{\Delta p}{r^{r_1} \overline{u}^{r_2} \rho^{r_3}}$ 中，就有：

$$\pi = \frac{\Delta p}{\rho \overline{u}^2}$$

同理可以得到：$\pi_1 = \dfrac{\mu}{\rho \bar{u} r}$，　$\pi_2 = \dfrac{l}{r}$

（4）依据 π 定理，$\pi = \varphi(\pi_1, \pi_2)$，将上面得到的 π_1, π_2, π 的形式带入 $\pi = \varphi(\pi_1, \pi_2)$，就有：$\dfrac{\Delta p}{\rho \bar{u}^2} = \varphi(\dfrac{\mu}{\rho \bar{u} r}, \dfrac{l}{r})$

（5）根据经验，。。。。见书上 P100。

四、 π定理在确定相似判据中的应用